

Aseiniad 0: Adfywio Hafaliadau Differol Cyffredin

2025–26

Aseiniad ddim i'w gyflwyno

Pam?

Gellir crynhoi'r dull o ddatrys llawer o hafaliadau differol rhannol a welwn yn y modiwl hwn fel a ganlyn: byddwn yn gwneud rhywbeth i'r hafaliad differol sy'n ei leihau i hafaliad differol cyffredin ac yna'n datrys yr hafaliad differol cyffredin sy'n deillio. Mae hyn yn wych, ond dim ond os ydym yn cofio sut i ddatrys rhai hafaliadau differol cyffreding. Dylai'r aseiniad hwn adfywio'ch cof ar rai mathau syml a fydd yn codi dro ar ôl tro. Bydd yr amser a fuddsoddir yma yn eich helpu'n sylweddol yn ddiweddarach.

Ambell gwestiwn hafaliadau differol cyffredin i ymarfer

1. Hafaliadau differol cyffredin trefn un gwahanadwy .

Darganfyddwch y datrysiad cyffredinol i bob hafaliad differol cyffredin drwy wahanu'r newidynnau:

(a) $\frac{dy}{dx} = xy$.

(b) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y}$.

(c) $\frac{dy}{dx} = e^{x-y}$.

2. Hafaliadau differol cyffredin trefn un llinol.

Datrysych bob un gan ddefnyddio ffactor integru:

(a) $\frac{dy}{dx} + y = x$.

(b) $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = 3 \quad (x > 0)$.

(c) $\frac{dy}{dx} + 4xy = 8x$.

3. Hafaliadau differol cyffredin trefn dau llinol gyda chyfernodau cyson.

Ar gyfer pob un o'r hafaliadau differol cyffredin homogenaidd canlynol, ysgrifennwch a datrysych yr *hafaliad ategol* a thrwy hyn rhwch y *ffwythiant cyflenwol*. Cynhwysych un o bob math o wraidd.

(a) $y'' - y' - 2y = 0$.

(b) $y'' - 4y' + 4y = 0$.

(c) $y'' + 4y' + 13y = 0$.

4. **Pa ddull fydddech chi'n ei ddefnyddio?**

Ar gyfer pob hafaliad differol cyffredin, nodwch ddull addas (*nid oes angen datrys*):

(a) $\frac{du}{dx} = x^3 - 2x$.

(b) $\frac{du}{dx} + \frac{1}{x}u = 5x$.

(c) $u'' + 5u' + 6u = 0$.

(d) $u' - 2u = e^{2x}$.

(e) $u' = x^2u^2$.

5. **Problemau gwerth cychwynnol/ffin.** Ar gyfer pob un, dewch o hyd i'r *datrysiad neilltuol* sy'n bodloni'r amod(au) a roddir.

(a) $\frac{dy}{dx} + y = x$, $y(0) = 1$.

(b) $\frac{dy}{dx} = xy$, $y(0) = 2$.

(c) $y'' - y' - 2y = 0$, $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

Atebion Enghreifftiol

1. Hafaliadau differol cyffredin trefn un gwahanadwy.

(a) $\frac{dy}{dx} = xy$.

Mae hwn yn wahanadwy. Ad-drefnwch (rhowch bopeth sy'n cynnwys y ar y chwith, popeth sy'n cynnwys x ar y dde) ac integrwch y ddwy ochr i gael

$$\int y^{-1} dy = \int x dx \Rightarrow \ln |y| = \frac{1}{2}x^2 + C,$$

lle mae C yn gysonyn mympwyol. Cymhwyswch y ffwythiant esbonyddol a rhowch yr arwydd yn y cysonyn:

$$y = Ae^{x^2/2}, \quad A \in \mathbb{R}.$$

(b) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y}$.

Mae hwn yn wahanadwy, felly

$$\int y dy = \int 2x dx \Rightarrow \frac{1}{2}y^2 = x^2 + C \Rightarrow y^2 = 2x^2 + C_1,$$

lle mae C a C_1 yn gysonion mympwyol. Felly,

$$y(x) = \pm \sqrt{2x^2 + C_1}.$$

(c) $\frac{dy}{dx} = e^{x-y} = e^x e^{-y}$.

Mae hwn yn wahanadwy. Mae ad-drefnu ac integru yn rhoi,

$$\int e^y dy = \int e^x dx \Rightarrow e^y = e^x + C,$$

lle mae C yn gysonyn mympwyol. Felly

$$y(x) = \ln(e^x + C).$$

2. Hafaliadau differol cyffredin trefn un llinol (ffactor integru).

(a) $\frac{dy}{dx} + y = x$.

Lluoswch â ffactor integru

$$e^{\int 1 dx} = e^x$$

i gael

$$e^x \frac{dy}{dx} + e^x y = xe^x \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \{e^x y\} = xe^x.$$

Nodwch fod y cywerthedd uchod yn haws ei weld yn y cyfeiriad yn ôl drwy ddifferu'r mynegiant rhwng y cromfachau crwm gan ddefnyddio rheol y lluoswm.

Integrwch ac ad-drefnwch:

$$e^x y = \int xe^x dx + C = (x-1)e^x + C \Leftrightarrow y = x-1 + Ce^{-x}.$$

Yma, cysonyn mympwyol yw C , a gwnaed yr integru fesul rhan.

(b) $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = 3 \ (x > 0).$

Lluoswch â ffactor integru

$$e^{\int 2x^{-1} dx} = e^{2 \ln x} = (e^{\ln x})^2 = x^2$$

i gael

$$x^2 \frac{dy}{dx} + 2xy = 3x^2 \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\{x^2 y\} = 3x^2.$$

Mae integru yn rhoi

$$x^2 y = x^3 + C \Rightarrow y = x + Cx^{-2},$$

lle mae C yn gysonyn mympwyol.

(c) $\frac{dy}{dx} + 4xy = 8x.$

Lluoswch â ffactor integru

$$e^{\int 4x dx} = e^{2x^2}$$

i gael

$$e^{2x^2} \frac{dy}{dx} + 4xe^{2x^2} y = 8xe^{2x^2} \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\{e^{2x^2} y\} = 8xe^{2x^2}.$$

Integrwch (noder $\frac{d}{dx}(e^{2x^2}) = 4xe^{2x^2}$):

$$e^{2x^2} y = \int dx 8xe^{2x^2} dx + C = 4e^{2x^2} + C,$$

lle mae C yn gysonyn mympwyol; felly

$$y = 4 + Ce^{-2x^2}.$$

3. Hafaliadau differol cyffredin trefn dau llinol gyda chyfernodau cyson.

(a) $y'' - y' - 2y = 0.$

Hafaliad ategol: $m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow (m - 2)(m + 1) = 0$, felly $m_1 = 2$, $m_2 = -1$ (real a gwahanol). Y ffwythiant cyflenwol yw

$$y_c(x) = Ae^{2x} + Be^{-x}.$$

(b) $y'' - 4y' + 4y = 0.$

Hafaliad ategol: $m^2 - 4m + 4 = 0 \Rightarrow (m - 2)^2 = 0$, gwreiddyn ailadroddedig $m = 2$ (luosogrwydd 2). Felly

$$y_c(x) = (A + Bx)e^{2x}.$$

(c) $y'' + 4y' + 13y = 0.$

Hafaliad ategol: $m^2 + 4m + 13 = 0$. Gwreiddiau

$$m_{\pm} = -2 \pm 3i \quad (\alpha = -2, \beta = 3).$$

Felly

$$y_c(x) = e^{\alpha x}(A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x)) = e^{-2x}(A \cos 3x + B \sin 3x).$$

4. Pa ddull fydddech chi'n ei ddefnyddio?

- (a) $\frac{du}{dx} = x^3 - 2x$. *Integru uniongyrchol mewn perthynas ag x (ar ffurf $\frac{du}{dx} = f(x)$).*
- (b) $\frac{du}{dx} + \frac{1}{x}u = 5x$. *Ffactor integru (trefn un, llinol).*
- (c) $u'' + 5u' + 6u = 0$. *Ffwythiant cyflenwol drwy'r hafaliad ategol (trefn dau, cyfernodau cyson, homogenaidd).*
- (d) $u' - 2u = e^{2x}$. *Ffactor integru (trefn un, llinol).*
- (e) $u' = x^2u^2$. *Gwahanu'r newidynnau (ar ffurf $\frac{du}{dx} = f(x)g(u)$).*

5. Problemau gwerth cychwynnol/ffin.

- (a) $\frac{dy}{dx} + y = x$, $y(0) = 1$.
O 2(a), y datrysiad cyffredinol yw $y = x - 1 + Ce^{-x}$. Gorfodwch $y(0) = 1$:

$$1 = 0 - 1 + C \Rightarrow C = 2.$$

Felly'r datrysiad neilltuol yw

$$y(x) = x - 1 + 2e^{-x}.$$

- (b) $\frac{dy}{dx} = xy$, $y(0) = 2$.
O 1(a), y datrysiad cyffredinol yw $y = Ce^{x^2/2}$. Gorfodwch $y(0) = 2$:

$$2 = Ce^0 \Rightarrow C = 2.$$

Felly

$$y(x) = 2e^{x^2/2}.$$

- (c) $y'' - y' - 2y = 0$, $y(0) = 1, y'(0) = 0$.
O 3(a), $y_c(x) = Ae^{2x} + Be^{-x}$. Yna

$$y'(x) = 2Ae^{2x} - Be^{-x}.$$

Gweithredwch yr amodau yn $x = 0$:

$$y(0) = A + B = 1, \quad y'(0) = 2A - B = 0.$$

Datrysych: o'r ail, $B = 2A$. Amnewid yn y gyntaf: $A + 2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{3}$, felly $B = \frac{2}{3}$.
Felly

$$y(x) = \frac{1}{3}e^{2x} + \frac{2}{3}e^{-x}.$$