

Datrysiaidau 1

2024–25

1. (*Ymarfer HDC*): Darganfyddwch y datrysiad cyffredinol i'r hafaliadau differol cyffredin isod:

- (a) $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x} = 3x^3$: Hafaliad differol cyffredin llinol a threfn un yw hwn. Lluoswn â'r ffactor integru $\exp(-\int \frac{2}{x} dx) = \exp(-2 \ln x) = x^{-2}$, sy'n rhoi

$$x^{-2} \frac{dy}{dx} - 2x^{-3}y = 3x \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \{x^{-2}y\} = 3x \Rightarrow y = \frac{3x^4}{2} + cx^2,$$

lle mae c yn gysonyn mympwyol.

- (b) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 0$: Hafaliad differol cyffredin trefn dau, llinol gyda chyfernodau cyson yw hwn. Yr hafaliad ategol yw $m^2 - 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow (m - 3)(m + 1) = 0$ ac felly gwreiddiau'r hafaliad ategol yw $m = -1$ and $m = 3$. Felly'r datrysiad cyffredinol yw $y = Ae^{-x} + Be^{3x}$, lle mae A a B yn gysonion mympwyol.
- (c) $y\frac{dy}{dx} = \frac{3}{x^2y}$: Mae'r hafaliad yn wahanadwy, felly

$$\int y^2 dy = 3 \int x^{-2} dy + c \Rightarrow \frac{y^3}{3} = c - 3x^{-1} \Rightarrow y = \left(C - \frac{9}{x}\right)^{1/3},$$

lle mae c, C yn gysonion mympwyol.

- (d) $\frac{dy}{dx} - y = 0$: $y = Ae^x$ (A yn gysonyn mympwyol, datryswyd naill ai trwy archwiliad, gyda'r ffactor integru e^{-x} neu trwy wahanu's newidynnau).
- (e) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$: Hafaliad differol cyffredin trefn dau, llinol, gyda chyfernodau cyson yw hwn. Yr hafaliad ategol yw $m^2 + 1 = 0$ ac felly'r gwreiddiau yr hafaliad ategol yw $m = \pm i$. Mae'n dilyn bod $y = A \cos x + B \sin x$, lle mae A, B yn gysonion mympwyol.

2. Nodwch drefn pob un o'r hafaliadau isod, a phenderfynwch ymhob achos (gan roi rhesymau) os yw'r hafaliad yn affinol, anhomogenaidd llinol neu'n llinol homogenaidd.

- (a) $u_x + xu_y = \sin x$: Trefn un. Ysgrifennwn yr hafaliad yn y ffurf $Lu = f(x, y)$, lle mae $L = \frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ a $f(x, y) = \sin x$. Mae'n dilyn o linoleddd differu rhannol fod $L(u + v) = Lu + Lv$ ar gyfer unrhyw ffwythiannau C^1 , u a v . Ymhellach, mae $L(cu) = cLu$ ar gyfer cysonyn c . Mae L felly yn weithredydd llinol, ac felly mae'r hafaliad differol rhannol yn un anhomogenaidd llinol.
- (b) $u_{xx} + uu_x = 0$: Trefn dau. Ysgrifennwn hwn yn y ffurf $Lu = 0$, lle mae $L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (\cdot)\frac{\partial}{\partial x}$. Mae hwn yn weithredydd affinol oherwydd y term $(\cdot)\frac{\partial}{\partial x}$. Gellir gweld hyn trwy nodi fod

$$L(cu) = \frac{\partial^2(cu)}{\partial x^2} + cu\frac{\partial}{\partial x}(cu) = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c^2 u\frac{\partial u}{\partial x} \neq c\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u\frac{\partial u}{\partial x}\right) = cLu$$

ar gyfer cysonyn c . Mae'n dilyn fod yr hafaliad differol rhannol yn un affinol.

- (c) $u_x + uu_y = u$: Trefn un. Mae'r hafaliad differol rhannol yn affinol o ganlyniad i'r term uu_y , yn ôl yr un ddadl ag yn rhan (b).
- (d) $u_x + 2u_y + 3 = x$: Trefn un. Gallwn aildrefnu'r hafaliad differol rhannol hwn (gan adael yr holl dermau yn y newidyn dibynnol, u , ar yr ochr chwith a'r termau eraill i gyd ar yr ochr dde) i roi $u_x + 2u_y = x - 3$. Gallwn ysgrifennu'r hafaliad yn y ffurf $Lu = f(x, y)$, lle mae $L = \frac{\partial}{\partial x} + 2\frac{\partial}{\partial y}$ ac $f(x, y) = x - 3$. Gan ddefnyddio llinoledd differu rhannol, nodwn fod L yn weithredydd llinol. Mae'n dilyn fod yr hafaliad differol rhannol yn un anhomogenaidd llinol. (**NB:** mae'r gweithredydd $\frac{\partial}{\partial x} + 2\frac{\partial}{\partial y} + 3$ yn affinol, felly roedd yr aildrefnu gwreiddiol yn bwysig.)
3. Darganfyddwch y datrysiad cyffredinol $u = u(x, y)$ ar gyfer yr hafaliad differol rhannol $u_{xy} = 3xy$.
- Mae integru yn ôl y yn rhoi $u_x = \frac{3xy^2}{2} + h(x)$ ac integru yn ôl x yn rhoi $u = \frac{3x^2y^2}{4} + \int h(x)dx + g(y)$. Gan fod integru ffwythiant mympwyol yn x yn rhoi ffwythiant mympwyol arall yn x , gallwn ysgrifennu'r datrysiad cyffredinol fel $u = \frac{3x^2y^2}{4} + f(x) + g(y)$.
4. (a) Darganfyddwch y datrysiad cyffredinol $u = u(x, t)$ o'r hafaliad differol rhannol

$$4u_x + 3u_t = 0.$$

Rydym yn defnyddio'r dull nodweddion. Gall yr hafaliad differol rhannol gael ei hysgrifennu yn y ffurf $(4, 3) \cdot \nabla u = 0$. Felly mae u yn gyson ar hyd y cromliniau nodwedd a ddiffinnir gan yr hafaliad differol cyffredin $\frac{dx}{dt} = \frac{4}{3}$. Mae gan yr hafaliad yma'r datrysiad $3x - 4t = c$, lle mae $c \in \mathbb{R}$ yn gyson (un cysonyn ar gyfer pob un gromlin nodwedd). Mae'n dilyn mai'r datrysiad cyffredinol yw $u(x, t) = f(c) = f(3x - 4t)$, lle mae $f \in C^1(\mathbb{R})$ yn fymptyol.

- (b) Felly, darganfyddwch y datrysiad o'r hafaliad differol rhannol $4u_x + 3u_t = 0$ sy'n bodloni'r amod cychwynnol (h.y. ar gyfer $t = 0$): $u(x, 0) = \cos x$.

Rydym nawr yn gosod yr amod cychwynnol: $u(x, 0) = f(3x) = \cos x$. Rydym yn diddwytho mai'r ffwythiant f yw $f(x) = \cos(x/3)$. Felly, datrysiad yr hafaliad differol rhannol yw $u(x, t) = \cos(x - \frac{4}{3}t)$.

5. Datrysych y broblem gwerth ffin

$$\begin{cases} x^2yu_x + 3u_y = 0, \\ u(x, 0) = \frac{1}{x}. \end{cases}$$

Gallwn ysgrifennu hwn fel $(x^2y, 3) \cdot \nabla u = 0$. Hynny yw, mae datrysiadau yn gyson ar hyd cromliniau sydd â'u tangiad yn gorwedd yn y cyfeiriad $(x^2y, 3)$. Disgrifir y fath gromlin gan yr hafaliad differol cyffredin $\frac{dy}{dx} = 3/(x^2y)$, sy'n wahanadwy. Mae datrysiadau'r hafaliad differol cyffredin ar ffurf $y^2 = c - \frac{6}{x}$. Gan fod u yn gyson ar hyd pob cromlin nodwedd ac mae cromliniau nodwedd gwahanol gyda gwahanol werthoedd ar gyfer c , mae'n dilyn bod $u = f(c) = f(y^2 + 6/x)$. Mae'r amod ffin yn ymhlygu $u(x, 0) = 1/x = f(6/x)$, felly $f(z) = z/6$. Felly'r datrysiad neilltuol yw $u = y^2/6 + 1/x$.

6. Datrysych yr hafaliad llinol $(1 + x^2)u_x + u_y = 0$.

Gallwn ysgrifennu'r hafaliad yn y ffurf $(1 + x^2, 1) \cdot \nabla u = 0$. Mae'r cromliniau nodwedd ar gyfer yr hafaliad yn bodloni $dy/dx = 1/(1 + x^2)$. Mae datrys yr hafaliad differol cyffredin

yma'n rhoi $y = \arctan x + C$. Mae datrysiadau'r hafaliad differol rhannol yn gyson ar bob un o'r cromliniau nodwedd. Felly, y datrysiad cyffredinol i'r hafaliad differol rhannol yw $u = f(y - \arctan x)$.

7. Datrysych yr hafaliad $(\sqrt{1-x^2})u_x + u_y = 0$ gyda'r amod $u(0, y) = y$.

Yn debyg i'r uchod, mae'r cromliniau nodwedd ar gyfer yr hafaliad hwn yn bodloni $dy/dx = 1/\sqrt{1-x^2}$, sydd â'r datrysiad $y = \arcsin x + C$. Felly, mae datrysiadau'n cymryd y ffurf $u(x, y) = f(y - \arcsin x)$. Mae'r amod $u(0, y) = y$ yn golygu fod $f(y) = y$, felly $u(x, y) = y - \arcsin x$ yw'r datrysiad sydd ei angen.

8. Gan ddefnyddio'r dull nodweddion, datrysych $u_x + u_y + u = e^{x+2y}$ gyda $u(x, 0) = 0$.

Ystyriwch y cromliniau a ddiffinnir gan

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = 1,$$

gyda'r amodau $x(0) = s$, $y(0) = 0$. Ar hyd y cromliniau hyn, mae'r hafaliad differol rhannol yn lleihau i'r hafaliad differol cyffredin

$$\frac{du}{dt} + u = e^{3t+s}.$$

Lluoswch trwodd â ffactor integru o e^t , i gael

$$e^t \frac{du}{dt} + e^t u = e^{4t+s} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \{e^t u\} = e^{4t+s} \Rightarrow u = \frac{1}{4} e^{3t+s} + c(s) e^{-t}.$$

Nodwch fod $t = y$ ac $s = x - y$, felly rydym yn trawsnewid yn ôl i newidynnau'r broblem wreiddiol, sef x ac y , i gael

$$u(x, y) = \frac{1}{4} e^{2y+x} + c(x-y) e^{-y}.$$

Mae cymhwyso'r amod $u(x, 0) = 0$ yn rhoi bod $c(x) = -\frac{1}{4} e^x$, ac felly'r datrysiad i'r broblem wreiddiol yw

$$u(x, y) = \frac{1}{4} (e^{x+2y} - e^{x-2y}) = \frac{1}{4} e^x (e^{2y} - e^{-2y}) = \frac{1}{2} e^x \sinh 2y.$$