Aseiniad 3

2025–26

Dychwelwch eich atebion i'r cwestiynau ⋆ erbyn diwedd dydd Gwener, 21ain o Dachwedd.

⋆1. Gan ddefnyddio'r dull adlewyrchiad a fformiwla d'Alembert, datryswch y broblem ar gyfer yr hafaliad ton ar gyfer llinyn hanner-anfeidraidd

$$\begin{cases} u_{tt} - 9u_{xx} = 0, & x > 0,\ t > 0, \\ u(x,0) = x^2 e^{-x}, & u_t(x,0) = xe^{-x}, \\ u(0,t) = 0. \end{cases}$$

⋆2. Darganfyddwch ddatrysiad yr hafaliad ton anhomogenaidd

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = x\cos t, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

3. Gadewch i $l > 0$ a $m, n \in \mathbb{Z}$. Profwch fod

$$\int_0^l \sin\frac{m\pi x}{l} \sin\frac{n\pi x}{l} \mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{l}{2}, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

Sylw: Dyma'r canlyniad defnyddion (heb brawf ar y pryd) ar gyfer y rhan ar gyfres Fourier ar y diwedd o'r datrysiad llinyn hyd-meidraidd.

4. Defnyddiwch y dull o wahanu newidynnau er mwyn datrys y broblem gwerth ffin cychwynnol

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad x \in [0,\pi],\ t > 0, \\ u(x,0) = \sin 3x, \quad u_t(x,0) = 0,\ \text{amodau cychwynnol.} \\ u(0,t) = 0 \quad u(l,t) = 0,\ t > 0 \text{ amodau ffin.} \end{cases}$$

(Gallwch ddefnyddio'r fformiwlâu a ddeillwyd mewn darlithoedd os ydych am gyfyngu eich datrysiadau i beidio bod yn rhy hir, ond gwnewch yn siwr eich bod yn deall y deilliad hwnnw.)

⋆5. Defnyddiwch y dull o wahanu newidynnau er mwyn darganfod y datrysiad cyffredinol i'r broblem gwerth ffin cychwynnol ar gyfer y hafaliad gwres dimensiwn un gyda phwyntiau terfyn ar dymeredd sero.

$$\begin{cases} u_t - c^2 u_{xx} = 0, \quad x \in [0,l],\ t > 0, \\ u(x,0) = f(x), \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0,\ t > 0. \end{cases}$$

Sylw: er bod y dull yn debyg i'r un rydym wedi gweld mewn darlithoedd ar gyfer yr hafaliad ton, nodwch fod yna UN deilliad rhannol mewn perthynas â t *(nid dau). Pan yn ffurfio'r broblem ar gyfer y newidyn* t*, ystyriwch hyn.*

6. Defnyddiwch y dull o wahanu newidynnau er mwyn datrys y broblem gwerth ffin cychwynnol sydd â hafaliad Laplace:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & x \in [0,1],\ y \in [0,1]; \\ u(0,y) = u(1,y) = 0, & y \in [0,1]; \\ u(x,1) = 0, & x \in [0,1]; \\ u(x,0) = 4\sin(5\pi x), & x \in [0,1]. \end{cases}$$

Awgrym: er nad yn hanfodol, efallai y byddwch yn darganfod y byddai defndyddio'r ffwythiannau cosh *a* sinh *ar rhyw bwynt yn eich datrysiad yn symleiddio eich gwaith.*